

# AJUSTAMENTO DE POLIGONAIS DE CONTROLE PARA LOCAÇÃO DE OBRAS DE ENGENHARIA

## Adjustments of control polygonals for civil building location

Denilson Viegas Segundo<sup>1</sup>, Marcio Augusto Reolon Schmidt<sup>2</sup>

Recebido em 16 de fevereiro de 2015; recebido para revisão em 20 de junho de 2015; aceito em 17 de agosto de 2015; disponível on-line em 02 de fevereiro de 2016.



### PALAVRAS CHAVE:

Ajustamento de observações;  
Modelagem de erros topográficos;  
Locação de obra;  
Controle de estruturas geodésicas.

### KEYWORDS:

*Adjustment computing;*  
*Topographic error modelling;*  
*Civil building location;*  
*Geodetic structures control.*

**RESUMO:** A realização de um levantamento topográfico para fins de locação de grandes obras de engenharia consiste em determinar com precisão adequada as feições chave de projeto para que seja possível a execução conforme requisitos de projeto. Os pilares, eixos de rodovias, alinhamento de represas e qualquer outro ponto de ancoragem da superestrutura precisa estar na posição correta no esforço de manter a execução da obra conforme o projeto de implantação. Entretanto, as condições de campo como variações de umidade, temperatura, pressão, problemas com equipamentos topográficos e de operação dão origem a diversos erros e contribuem para a degradação da qualidade do processo de levantamento e locação topográfica. Por isso, esta pesquisa avalia as metodologias topográficas propostas NBR13.133 para o controle de qualidade das coordenadas dos pontos das poligonais usadas como controle e, a partir das quais, essas grandes obras serão locadas no terreno para sua execução. Os resultados mostram que a avaliação por mínimos quadrados de uma poligonal por caminhamento com diagonais internas ao polígono convexo apresenta maior rigidez na estrutura e minimiza os erros de leituras em campo, ao passo que o uso de leituras angulares apresentou os piores resultados.

**ABSTRACT:** The realization of a topographic survey for location of big engineering building should be run with adequate precision the key features to be able to run according to the project requirements. The pillars, road axes, dams alignment and any other anchor point of the superstructure must be in the correct position in an effort to maintain the execution of the work as the deployment project. However, the field conditions such as humidity variations, temperature, pressure, problems with topographical equipment and operation give rise to many errors and contribute to the degradation of its quality of the topographic location. Therefore, this research evaluates topographical methodologies suggest in NBR13.133 proposals for the quality control of the coordinates of the points of the polygonal used as control, and from which, these building works will be located for its implementation. The evaluation results show that the least-squares method of a traditional polygonal with the internal diagonal of the convex polygon has increased rigidity in structure and minimizes reading errors in the field, while the use of angular readings showed the worst results.

### \* Contato com os autores:

<sup>1</sup> e-mail : [denilsonsegundo@hotmail.com](mailto:denilsonsegundo@hotmail.com) ( D. V. Segundo )

Discente do curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Uberlândia (UFU).

<sup>2</sup> e-mail : [marcioschmidt@feciv.ufu.br](mailto:marcioschmidt@feciv.ufu.br) ( M. A. R. Schmidt )

Professor Dr da Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Federal de Uberlândia (UFU).

## 1. INTRODUÇÃO

A realização de um levantamento topográfico consiste em determinar com precisão coordenadas polares, através ângulos e distâncias, que naturalmente e inevitavelmente contém erros de medida que podem ser de natureza sistemática, grosseira e aleatória (Comastri, 1994). Todo o levantamento envolve a obtenção de medições com procedimentos adequados e rigorosos em campo. As redes de triangulações e trilaterações topográficas são essenciais para fornecer coordenadas de pontos na superfície terrestre com alta precisão, necessárias para o projeto, construção e monitoramento de obras importantes de engenharia como pontes, túneis ou barragens (MELO et al, 2012).

Mesmo com as tecnologias disponíveis como o posicionamento GPS-RTK, durante a construção de grandes obras de engenharia como pontes, rodovias, túneis ou barragens, as estações totais ainda são os equipamentos com mais ampla utilização. Nestas situações, as técnicas empregadas para determinação das poligonais de referência e as locações são as mesmas de muitos anos atrás. São utilizadas as poligonais por caminhamento e redes por trilateração e por triangulação.

Independente de qual técnica seja utilizada, a determinação das coordenadas dos seus vértices deve ter precisão compatível com as especificações de projeto de forma que seja possível o uso destes pontos como apoio à tarefa de locação de obras. Segundo Carvalho e Leandro (2007), os erros de observação não permitem que haja um fechamento geométrico adequado da poligonal e, portanto, é necessário que se faça um controle da qualidade dos erros nas observações de ângulos e distâncias. Estes erros ocorrem devido às falhas humanas, imperfeições do equipamento e por fatores atmosféricos. Por estas razões é imprescindível a determinação da qualidade posicional dos vértices para se estimar a propagação de variância para os pontos a serem locados na obra. A ferramenta indicada para esta análise é o ajustamento de observações.

Admitindo a existência de erros randômicos e observações superabundantes, utiliza-se o Método dos Mínimos Quadrados (M.M.Q) para a determinação da estimativa única dos parâmetros ajustados (coordenadas das feições) e avaliação da sua variância (resíduos). O princípio fundamental do M.M.Q, é que a soma dos quadrados dos resíduos seja minimizado (Gemael, 1994; Dalmolin 2002). Este método, constante na NBR 13133 (ABNT, 1994), permite estimar a distribuição de erros e resíduos das coordenadas dos pontos da poligonal ou da rede. O MMQ, em seus diferentes métodos de ajustamento, permite definir a qualidade e o grau de confiança para as coordenadas e medidas envolvidas.

Por isto, esta pesquisa apresenta uma avaliação do controle de propagação de variâncias em poligonais fechadas por caminhamento, trilateração e triangulação, com variação das suas observações, na estimativa dos resíduos e indicação da mais adequada para utilização como densificação do referencial nos trabalhos de locação de obra.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Podem ser utilizadas diferentes metodologias de levantamento para a determinação das poligonais de apoio que servirão como referência para a locação das obras de engenharia. As técnicas topográficas para estabelecimento de pontos de alta precisão com uso de estações totais usadas são as poligonais por caminhamento, por triangulação e por trilateração.

Na poligonal por caminhamento, as distâncias e direções são determinadas entre os vértices da poligonal ocupando-se os vértices sucessivamente com a estação total, ou teodolito, e determinando os ângulos relativos entre si. O procedimento é repetido até que todos os vértices tenham sido ocupados. Trata-se da forma mais comum de densificação de referencial utilizada em levantamentos topográficos, entretanto o número de equações obtidas é igual ao de variáveis. A inserção de equações advindas da repetibilidade das leituras, incorre no estabelecimento de

equações linearmente dependentes e tornar a solução do sistema impossível (Gemal 1994, pag 246). Isto pode gerar um sistema indeterminado devido a singularidade da matriz. Por isto a repetibilidade das leituras é utilizada para melhoria das observações conforme as classes IIP, IIIP e IVP da NBR13.133 (ABNT, 1994). Para haver superabundância de equações de forma a atender o M.M.Q deve-se, portanto, fixar as coordenadas de um ou mais pontos.

A triangulação consiste num método de observação de direções a partir de um alinhamento de coordenadas com a distância entre os pontos deste alinhamento conhecida. Esta base, ou seja, a distância tomada entre dois pontos fixados, apesar de usualmente ser pequena, é usada para determinar a escala da rede, pois a partir dela são realizadas as demais observações. O importante é que o rigor do levantamento desta base seja aplicado a todo levantamento para minimizar a propagação de variâncias na determinação dos ângulos.

A trilateração é o método de levantamento topográfico baseado exclusivamente na medição de distâncias horizontais (Melo et al, 2012). Esse método apresenta a vantagem de ser mais rapidamente executável que a triangulação e produzir os resultados aceitáveis em precisão em

função dos modernos distanciômetros a laser das estações totais. O princípio é formar triângulos que atendam ao critério de fechamento dos lados a partir da determinação do comprimento dos lados. A Figura 1 apresenta a configuração dos métodos de trilateração (a) e triangulação (b) para a determinação de coordenadas na planimetria.

Na Figura 1a são realizadas as medidas das distâncias ( $l_1$  a  $l_9$ ) entre os pontos de forma que as equações resultantes sejam não correlacionadas. Os pontos EPS4 e EPS7 foram fixados. Na figura 1b são apresentadas as leituras angulares da triangulação (medidas  $\alpha_1$  a  $\alpha_6$ ) e a base  $l_1$  entre os pontos fixados P1 e P3.

Existem problemas específicos no uso de triangulação ou trilateração isoladamente, como a influência da configuração da rede em si nos resultados da distribuição de erros e também obter um número de equações de observações não correlacionadas que possibilitem um certo grau de liberdade para que o sistema seja possível. Por isso, uma estratégia é procurar aumentar a rigidez da rede através da inserção de pontos de controle. Estes pontos devem ter alta precisão e estar em um referencial compatível com aquele da rede ou da poligonal. Por isso, o levantamento deve ser pensado para combinar as técnicas de campo com a rigidez da rede.

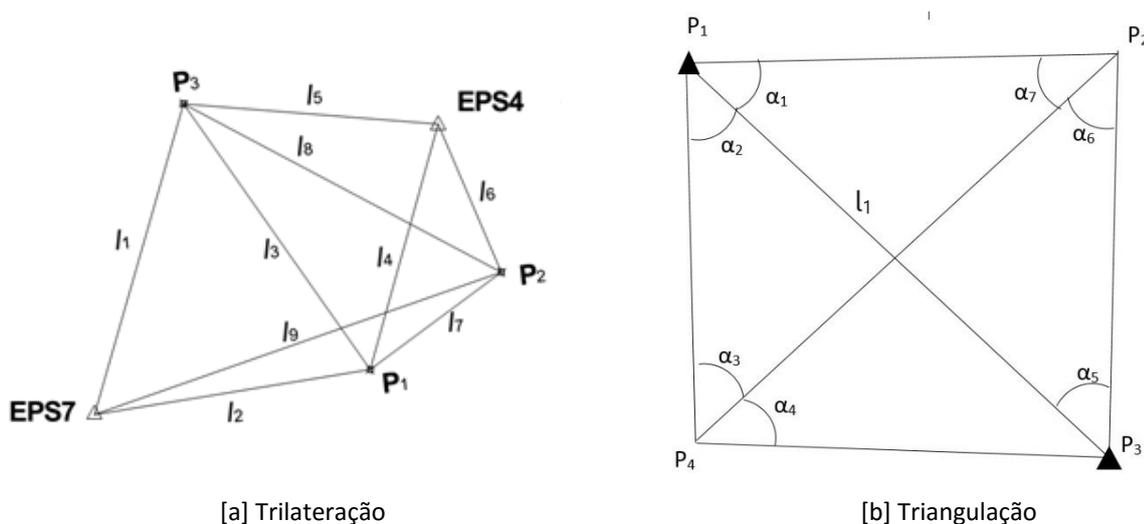


FIGURA1: Exemplos de [a] Trilateração e [b] Triangulação.

Fonte: Adaptado de Melo et al (2012).

## 2.1 AJUSTAMENTO PELO M.M.Q. - CASO PARAMÉTRICO

O ajustamento de observações é um ramo da matemática aplicada que, com a estatística, objetiva estimar valores únicos e mais prováveis para um conjunto de observações (GEMAEL, 1994). Em toda a coleta de observações, os valores mensurados estão sujeitos a erros grosseiros, sistemáticos e acidentais. Gemael (1994) afirma que os erros grosseiros e sistemáticos são eventualmente detectados com relativa facilidade, os erros sistemáticos podem ser modelados por diferentes técnicas, porém os erros acidentais ou aleatórios não podem ser modelados dada a sua variabilidade. Devido às incertezas desses erros, usa-se o ajustamento de observações para encontrar um valor estatisticamente representativo do valor real da observação.

O ajustamento por M.M.Q. permite verificar a precisão e variância das coordenadas e das observações como forma de identificar e separar erros de observação de reais deslocamentos. Segundo Gemael (1994) ajustamento de observações diz respeito à minimização dos erros acidentais das medidas, com a utilização do método dos mínimos quadrados, o qual tem como fundamento minimizar a soma dos quadrados dos resíduos. O objetivo é resolver os valores de parâmetros e observações através da superabundância de observações, extraíndo um resultado único que representa com maior confiança a grandeza medida e os parâmetros estimados. As observações são relacionadas com os parâmetros por meio de modelos matemáticos devidamente escolhidos. O princípio do Método dos Mínimos Quadrados é que a soma dos quadrados dos resíduos das observações deve ser “mínimo”, como na Equação 1.

$$\sum V^T . P . V = \min \quad \text{Eq. [1]}$$

Em que:

**V:** vetor dos resíduos das observações tomadas em campo;

**P:** matriz dos pesos *a priori*;

Dentre os métodos de ajustamento existentes no MMQ, esta pesquisa selecionou o método paramétrico, no qual os parâmetros a serem ajustados e os resíduos a serem estimados são as coordenadas planas dos vértices em si e a determinação das suas variâncias. No método paramétrico, para cada observação de campo (ângulo e distância) formula-se ao menos uma equação baseada no modelo matemático adotado para o ajustamento paramétrico. É importante que essas equações sejam não correlacionadas para que o sistema de resolução em (Equação 1) seja possível e determinável. Para isso, o número de graus de liberdade deve ser maior que 1, ou seja, o número de equações de observações do método paramétrico deve ser maior que o número de incógnitas. Considerando-se que se tenha *n* observações e *u* parâmetros, então obtém-se um conjunto de *n* equações com *u* parâmetros com a seguinte representação matricial (Equação 2):

$$L_a = F(X_a) \quad \text{Eq. [2]}$$

Em que:

**L<sub>a</sub>:** vetor (*n* x 1) de observações ajustadas;

**X<sub>a</sub>:** vetor (*u* x 1) de parâmetros desconhecidos ajustados;

**F(X<sub>a</sub>):** função representativa do modelo matemático que relaciona as observações ajustadas com os parâmetros ajustados.

A resolução é dada pela equação do método paramétrico na sua forma explícita pela Equação 3. A matriz (*n* x *u*) das derivadas parciais da função *F* é comumente chamada de matriz Jacobiana ou matriz *A*. Nela os modelos matemáticos adotados são derivados em relação a cada um dos parâmetros que se deseja determinar para a criação da matriz *A* e os valores iniciais do levantamento são determinados aplicando-se os valores encontrados em campo, chamado de valores iniciais.

$$X = (A^T P A)^{-1} . (A^T P L_b) = N^{-1} . U \quad \text{Eq. [3]}$$

Em que:

**A:** matriz jacobiana ou matriz das derivadas das equações paramétrica em função dos parâmetros;

**P:** matriz dos pesos definidos a priori;

**Lb:** vetor das observações de campo;

**N:** matriz dos coeficientes dos parâmetros desconhecidos da equação normal;

**U:** matriz das estimativas dos parâmetros desconhecidos a partir das observações.

A avaliação dos resíduos é dada pela Equação 4:

$$V = A \cdot X + L \quad \text{Eq. [4]}$$

Em que:

**A:** matriz jacobiana ou matriz das derivadas das equações paramétrica em função dos parâmetros;

**X:** vetor dos parâmetros estimados;

**L:** vetor das observações ajustadas.

A partir dos resíduos é possível se avaliar a qualidade da transformação através da análise do grau de aderência entre a variância a priori, definida genericamente como 1, e a variância a posteriori calculada a partir dos resíduos encontrados e do número de graus de liberdade (Equação 5). Esta análise é realizada através do teste Qui-quadrado.

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n - u} \quad \text{Eq. [5]}$$

Em que:

$\hat{\sigma}_0^2$  : Sigma a posteriori;

**V:** vetor dos resíduos das observações tomadas em campo;

**P:** matriz dos pesos a priori;

**n:** número de equações de observação;

**u:** número de parâmetros incógnitas.

A matriz Variância-Covariância é determinada pela equação 6:

$$\sum X_a = \sigma_0^2 \cdot N^{-1} \quad \text{Eq. [6]}$$

Em que:

$\sum X_a$ : Matriz variância- covariância dos parâmetros ajustados;

$\hat{\sigma}_0^2$  : Sigma a posteriori;

**N:** matriz dos coeficientes dos parâmetros desconhecidos da equação normal.

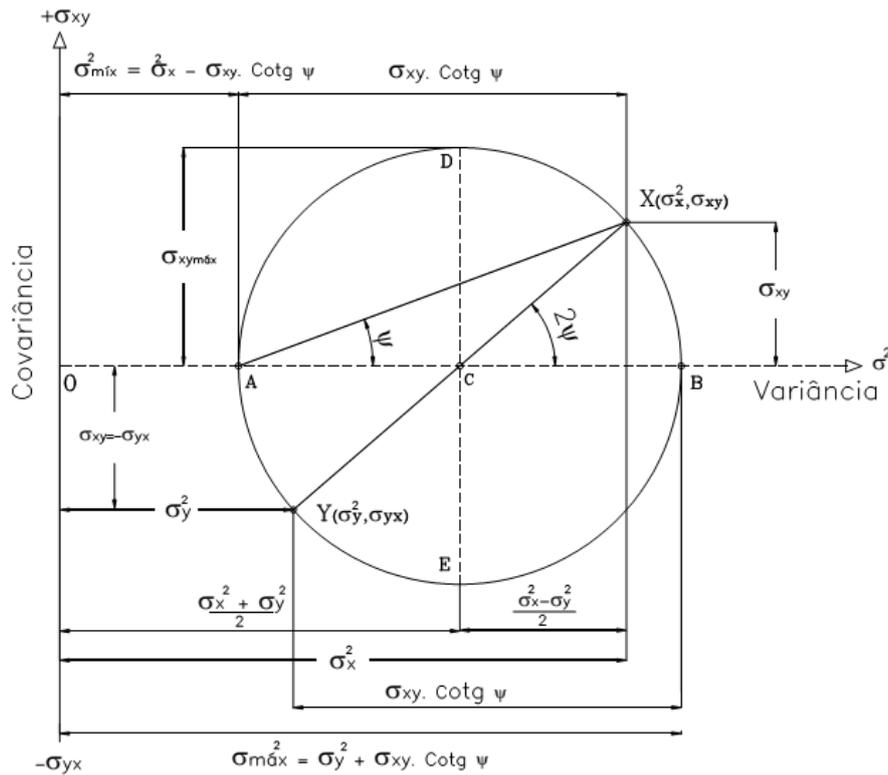
Melo et al (2012) resgatam que para redes topográficas o ajustamento pode ser realizado por diferentes programas como o *Starnet* da *Starplus Software*, o *SURPAC Surveying Software*, entre outros. Existem as opções ainda de programas livres como o *ADJUST* e o *WOLFPACK* de Wolf e Ghilani (1997, 2002, 2010), disponibilizados gratuitamente na internet.

## 2.2 ELIPSE DOS ERROS

O uso da técnica do círculo de Mohr para avaliar a precisão de ajustamento, baseia-se nos valores da matriz variância-covariância dos parâmetros desconhecidos ajustados ( $\Sigma_{xy}$ ) (Amorim, 2005). Segundo este autor, os valores de variância e covariância dos pontos são representados em posições diametralmente opostas no círculo de Mohr, através de dois pontos X e Y. As coordenadas desses pontos correspondem aos valores da variância ( $\sigma$ ) e covariância ( $\sigma_{xy}$ ). Como as variâncias em X e Y são diferentes, o círculo de Mohr se degenera em uma elipse. Para o caso desses valores serem iguais, a forma do círculo é mantida.

Na hipótese de distribuição normal dos erros, a interpretação geométrica da elipse em sua forma padrão pode ser entendida como uma probabilidade da posição estimada para o ponto esteja dentro da elipse, centrada na posição ajustada. Em outras palavras, a posição ajustada é o valor mais provável e a precisão desta posição é dada pelo tamanho da elipse. Quanto menor a elipse de erros mais preciso é o ponto, uma vez que as variâncias medidas nos eixos desta elipse são menores quando comparados aos demais vértices da poligonal. Para obtenção uma região de probabilidade de 95%, basta multiplicar o semieixo maior e menor, obtido em um processo de ajustamento, por um fator de 2,447 (Carvalho e Leandro, 2007).

A orientação da elipse é dada pela variação do sinal da covariância  $\sigma_{xy}$  e pela análise da variância em X em relação à de Y. A Figura 2 mostra os elementos do círculo de Mohr para a análise da elipse de erros.

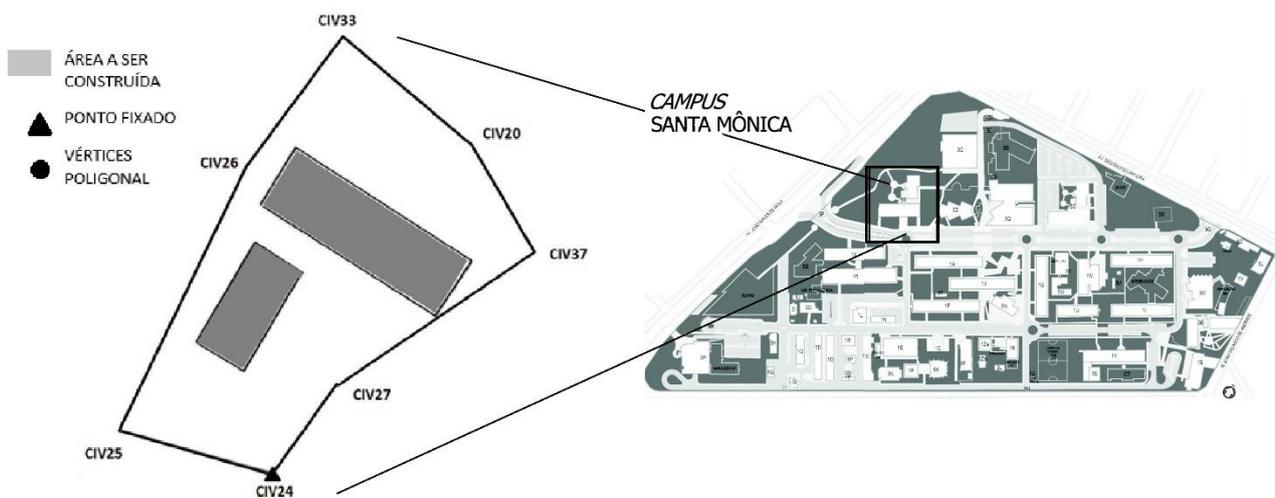


**FIGURA 2:** Círculo de Mohr adaptado para avaliação das precisões do ajustamento. **Fonte:** Amorim, (2005).

### 3. MATERIAIS E MÉTODOS

Para simular uma situação real de implantação de uma grande obra, foi estabelecida uma poligonal de 07 estações, distribuídas no entorno de um novo bloco de salas de aula no de campus Santa Mônica da Universidade Federal de

Uberlândia de forma a serem visíveis entre si e apresentadas na figura 3. As coordenadas foram levantadas pelos três métodos discutidos anteriormente, caminhamento, trilateração e triangulação. Neste último caso a base foi determinada no mesmo alinhamento de azimute.



**FIGURA 3:** Localização da poligonal utilizada nos experimentos. **Fonte:** Autores.

Para fins de avaliação metodológica, os pontos de azimute, CIV 24 e CIV25 da poligonal, foram fixados com peso de 0,0001 m em X e em Y. Portanto a matriz A foi derivada em relação aos demais pontos não fixados. Entretanto, para avaliação da propagação sobre as distâncias foi realizado a avaliação com a fixação somente do ponto CIV24. Com isso, a matriz jacobiana teve as linhas e colunas relativas ao ponto CIV25 adicionadas. A matriz dos pesos *a priori* (P) foi determinada como a matriz diagonal cujos valores são o inverso das precisões de ângulo e distância. Nesta etapa não foi realizada estudos de propagação de variância *a priori* e, portanto, o  $S_0$  foi considerado como o inverso das precisões nominais das observações dados pela estação total utilizada. Os valores dos pesos adotados para as observações foram determinados em função da estação total utilizada Ruide 822A de precisão angular de 05" e linear de 2mm+ 2ppm.

O modelo matemático adotado para o ajustamento paramétrico foi o de ângulos horizontais e distâncias. Os ângulos horizontais em uma poligonal podem ser entendidos como uma diferença entre o azimute de vante e o de ré, considerando o sentido de desenvolvimento da poligonal (Equações 8 e 10) e as distâncias são diferenças em coordenadas euclidianas (Equações 9 e 11). A adoção do plano topográfico como referência é uma simplificação que permite esta interpretação desde que as leituras sejam curtas. As equações genéricas abaixo consideram que os pontos i, j e k pertencem a uma mesma poligonal sendo i o ponto ocupado pelo teodolito, k o ponto de ré e j o ponto de vante à i nesta poligonal.

$$A_{zij} = H_j - H_i$$

$$A_{zij} = \tan^{-1} \frac{(x_j - x_i)}{(y_j - y_i)} - \tan^{-1} \frac{(x_i - x_k)}{(y_i - y_k)} \quad \text{Eq.}[8]$$

$$d_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad \text{Eq.}[9]$$

**Em que:**

**A<sub>zij</sub>:** azimute do alinhamento entre os pontos i e j, genéricos;

**X, Y:** coordenadas planas cartesianas dos pontos i, j, k, genéricos;

**H:** ângulos horizontais entre as direções do alinhamento entre pontos i e j, i e k;

**d:** distância euclidiana entre os pontos i e j.

Os elementos da matriz jacobiana A, quando não nulos são obtidos por:

a) Para ângulos horizontais (Amorim, 2005):

$$\frac{\partial Az_{ij}}{\partial x_i} = -\frac{(y_j - y_i)}{d_{ij}^2}, \quad \frac{\partial Az_{ij}}{\partial x_j} = \frac{(y_j - y_i)}{d_{ij}^2},$$

$$\frac{\partial Az_{ij}}{\partial y_i} = \frac{(x_j - x_i)}{d_{ij}^2}, \quad \frac{\partial Az_{ij}}{\partial y_j} = -\frac{(x_j - x_i)}{d_{ij}^2}, \quad \text{Eq.}[10]$$

b) Para distâncias (Melo et al, 2012):

$$\frac{\partial d_{ij}}{\partial x_i} = \frac{(x_i - x_j)}{d_{ij}}, \quad \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j} = \frac{(x_j - x_i)}{d_{ij}},$$

$$\frac{\partial d_{ij}}{\partial y_i} = \frac{(y_i - y_j)}{d_{ij}}, \quad \frac{\partial d_{ij}}{\partial y_j} = \frac{(y_j - y_i)}{d_{ij}}, \quad \text{Eq.}[11]$$

Para a realização do ajustamento foi utilizado o programa ADJUST<sup>®</sup>, programa livre e disponibilizado na internet pela Universidade da Pensilvânia, e que exige uma configuração de entrada como mostra a Quadro 1.

Para cada uma das alternativas de rede (caminhamento, trilateração e triangulação) foram realizados diversos experimentos alterando as configurações básicas como número de vértices fixados, número de distâncias lidas, número de ângulos lidos, e assim por diante. Foram testados as poligonais por caminhamento com 2 e 3 ângulos adicionais internos e variações de 3 a 6 distâncias internas com fixação de 1 e 2 pontos. Na triangulação foram avaliadas variações de 2 a 4 ângulos adicionais e na trilateração foram avaliadas variações de 12 a 16 distâncias com fixação de 1 e 2 pontos.

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Foi realizado o ajustamento das observações pelo método paramétrico da poligonal, onde foi adotado como critério de convergência para parada da iteração, um valor de  $\delta \leq 0,01\text{mm}$  para as correções aos parâmetros aproximados em relação à iteração anterior. Segundo Dalmolin (2002, pag. 96) este valor pode ser arbitrário analisadas as condições do levantamento. No contexto desta pesquisa, variações abaixo de 1cm no vetor das coordenadas ajustadas tornam-se não relevantes. Em geral foram necessárias dez iterações em cada uma das poligonais para que se atingisse a especificação de  $\delta$ .

**Quadro 1: Organização do arquivo no programa Adjust®.**

<b>Exemplo de preenchimento</b>	<b>Legenda do dado</b>
Example 13-3 of Elementary Surveying: An Introduction in Geomatics, 10th Ed. text book	Linha do título, ou seja, identificação do trabalho
5 5 1 1 5	# de distâncias # de ângulos horizontais lidos # de azimutes conhecidos # de vértices fixados # total de vértices da poligonal ou rede
A 10000.00 10000.00	Estações com coordenadas X e Y fixadas (vértices de controle)
B 10125.66 10255.96 C 10716.31 10102.44 D 10523.62 9408.37 E 10517.55 9611.34	Lista das coordenadas X e Y aproximadas dos vértices calculadas pelo método convencional
A B 285.10 0.05 B C 610.45 0.05 C D 720.48 0.05 D E 203.00 0.05 E A 647.02 0.05	Lista das distâncias aproximadas entre os vértices lidos em campo e respectivos desvios-padrão (em m)
B A E 100 44 30 15 C B A 101 35 00 15 D C B 89 05 30 15 E D C 17 12 00 15 A E D 231 24 30 15	Lista de ângulos horizontais lidos em campo e respectivos desvios-padrão (em segundos)
A B 26 10 00 1	Azimute observado e desvio-padrão (em segundos)

Os valores obtidos pelo método tradicional tiveram as variâncias calculadas baseadas nas séries obtidas em campo, sendo que a maior parte dos pontos teve 4 séries lidas e alguns pontos somente 3 séries. Mesmo que a média seja um valor mais provável para uma observação (Gemael, 2004) os seus resíduos parecem estar superestimados. Quando comparados aos resultados obtidos por outros métodos.

Para a trilateração foram variadas o número de distâncias internas lidas entre 11 e 16 e o foram fixados somente o vértice CIV24 e o CIV24 e CIV25. A variação da distribuição dos resíduos teve maior impacto relacionado à fixação do ponto CIV25 do que ao número de distâncias medidas. Em outras palavras os valores das coordenadas finais sofreram maior variação quando comparadas à técnica combinada. Além disso, os valores do teste de qui-quadrado que aceitaram o resultado do ajustamento foram com 11 e 12 medidas lineares, sendo 7 da poligonal de contorno e as demais tomadas internamente. Em ambos os casos, o vértice CIV33 apresentou os mais altos valores de

resíduo. Isto pode ser devido a ser o ponto mais distante do ponto CIV 24, fixado.

Para a triangulação variou-se o número de ângulos lidos entre os vértices de 12 a 16 leituras com a fixação de 2 vértices (uma base) a 3 vértices (duas bases adjacentes). Este método apresentou os piores resultados, sendo que exigiu um grande número de observações angulares. Em outras palavras, para a solução do sistema foi necessário criar diversas equações de observações internas para ser possível a distribuição por MMQ. O problema, desta técnica está em incorrer em equações correlacionadas. A leitura de ângulos entre os vértices da poligonal pode gerar equações correlacionadas, o que levaria o determinante do sistema paramétrico (matriz A) tender a zero. Isto ocorreu com os ângulos medidos no vértice CIV33 que geraram resíduos acima de 3'. Porém ao se retirar uma das observações deste ponto, os resíduos diminuíram. Mesmo assim, os valores obtidos por este método estão muito acima do desejável, como mostrado na Quadro 2.

Na análise combinada os dados da poligonal sofreram variações de distâncias de 7, número de alinhamentos da poligonal, a 13, os alinhamentos da poligonal acrescidos das diagonais internas; variação no número de pontos fixados: somente CIV 24 ou fixados os pontos CIV24 e CIV25; e variações no número de ângulos internos lidos de 7 a 11, sendo estes os números entre os alinhamentos ou os alinhamentos e as diagonais inseridas posteriormente.

A qualidade do ajustamento foi analisada com base no teste estatístico qui-quadrado a um nível  $\alpha=5\%$  de significância. Os valores encontrados para as variâncias e covariâncias entre as coordenadas estimadas por cada um dos métodos foram utilizados para o desenho das elipses dos erros. A figura 3 apresenta a formulação da rede e das elipses de erros computadas no ajustamento. A triangulação por ter somente uma base não permite que o programa gere a estimativa da rede antes do ajustamento.

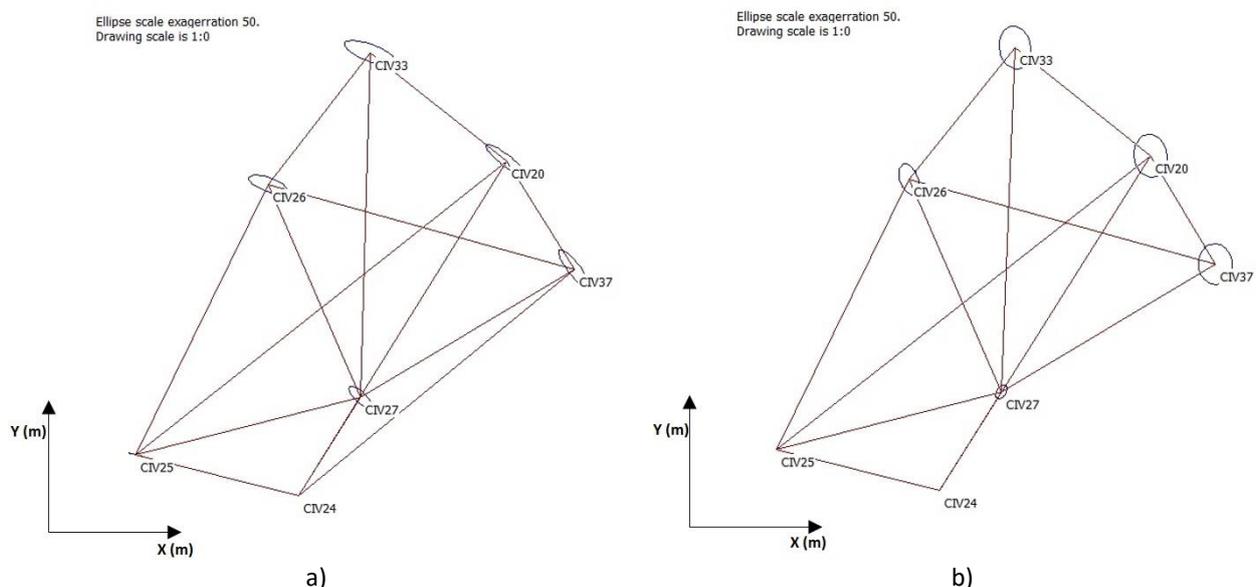
Na Figura 4a, percebe-se que a trilateração apresenta uma variância das distâncias no sentido esquerda-direita de maneira semelhante. Isto pode sugerir a presença de erros sistemáticos ao longo do eixo X. Na Figura 4b, o método combinado redistribui essas tendências de variâncias de modo que as elipses se aproximam ao desenho de um círculo.

A combinação de três diagonais resultou nos valores com menor resíduo (Quadro 2). Esse número de distâncias adicionais possibilitou um maior número de equações sem gerar tendência no

sistema, pois no teste de qui-quadrado o valor ficou em 0,07 com limites entre 0,0459 e 0,502.

Como as variâncias e covariâncias são utilizadas nos cálculos das elipses, percebe-se que os dados angulares estão eivados de erros, com destaque para o ponto CIV33. Este ponto foi o que apresentou maior dificuldade para sua determinação em campo, por ter sofrido com vandalismo e a construção de um painel de propagando nas suas proximidades. Percebe-se além disso, que nas trilaterações os maiores resíduos ocorrem também neste ponto. Os erros neste caso não se limitam ao ponto, mas foram distribuídos entre os demais vértices não fixados conforme o desenvolvimento dos MMQ.

É interessante notar que na análise combinada, as variações no número de ângulos não contribuíram com a redução dos resíduos. A fixação do segundo ponto (CIV25) gerou um ligeiro aumento no resíduo em X, com o consequente deslocamento das coordenadas dos pontos nesse eixo. Isso pode indicar que exista um erro sistemático que deixa de ser modelado neste vértice. Os resultados obtidos indicam os menores resíduos do que quando os métodos são aplicados isolados. Além disso, dos métodos aplicados em relação à coordenada calculada pelo método de Bowditch NBR13.133 (ABNT, 1994) a combinação de ângulos e distâncias apresentou o menor deslocamento de coordenadas, em especial daqueles vértices mais distantes dos pontos fixados.



**FIGURA 4:** Elipses de erros propagados na rede (a) com trilateração, e (b) rede combinada de ângulos e distâncias.

**FONTE:** Autores a partir do programa Adjust.

**Quadro 2:** Resultados obtidos com a variação dos métodos combinado, trilateração e triangulação.

COORDENADAS OBTIDAS										
Nome do ponto	Método tradicional NBR13.133/1994		Combinada (1 ponto fixo)		Trilateração (1 ponto fixo)		Trilateração (2 pontos fixos)		Triangulação (base com 2 pontos fixos)	
	X (m)	Y (m)	X (m)	Y (m)	X (m)	Y (m)	X (m)	Y (m)	X (m)	Y (m)
CIV24	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
CIV25	903,831	835,665	903,829	835,661	903,831	835,665	903,831	835,665	904,77	837,268
CIV26	1078,13	892,924	1078,127	892,922	1078,05	893,167	1078,073	893,097	1077,406	893,921
CIV32	1185,327	808,769	1185,327	808,767	1184,372	807,909	1185,11	808,739	1185,22	809,226
CIV33	1402,327	791,186	1402,328	791,187	1401,281	789,23	1402,099	791,013	1401,137	791,676
CIV20	1435,74	948,033	1435,74	948,029	1435,523	945,897	1435,534	947,856	1435,762	947,798
CIV27	1328,778	1072,051	1328,781	1072,047	1329,131	1070,405	1328,778	1070,051	1328,778	1072,051
RESÍDUOS CALCULADOS										
Nome do ponto	$\sigma^2_x$ (m)	$\sigma^2_y$ (m)	$\sigma^2_x$ (m)	$\sigma^2_y$ (m)	$\sigma^2_x$ (m)	$\sigma^2_y$ (m)	$\sigma^2_x$ (m)	$\sigma^2_y$ (m)	$\sigma^2_x$ (m)	$\sigma^2_y$ (m)
CIV24 *	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
CIV25	0,0007	0,0007	0,0034	0,0057	0,000	0,000	0,0010	0,0016	28,7228	49,0822
CIV26	0,0043	0,0043	0,0064	0,0071	0,052	0,055	0,0738	0,2237	22,9910	23,5449
CIV32	0,0033	0,0033	0,0080	0,0091	0,107	0,128	0,1892	0,2198	29,4930	16,9248
CIV33	0,0024	0,0024	0,0096	0,0137	0,118	0,243	0,1933	0,1393	86,5468	39,8534
CIV20	0,0047	0,0047	0,0083	0,0141	0,036	0,266	0,1490	0,1281	21,3272	25,1320
CIV27 **	0,0056	0,0056	0,0089	0,0104	0,047	0,221	---	---	---	---

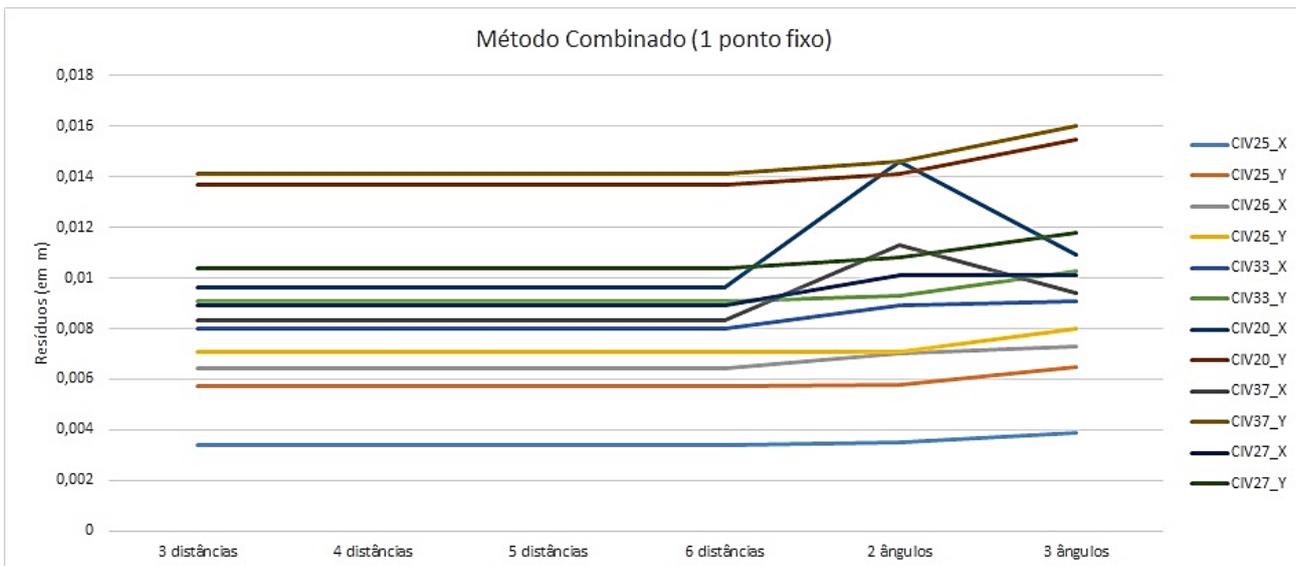
\* Ponto Civ24 fixado com variância de 0,001m respectivamente a  $\sigma^2_x$  e  $\sigma^2_y$

\*\* Ponto Civ27 fixado somente nos dois últimos casos da tabela com precisão igual a CIV24.

As Figuras 4, 5 e 6, apresentam as variações dos resíduos das coordenadas dos vértices por método. Nos gráficos são apresentadas as variações em X e em Y de acordo com a inclusão de novas observações de campo na matriz A. Na Figura 5, o acréscimo de observações de distâncias adicionais internas à poligonal manteve as coordenadas estáveis. Entretanto, o acréscimo de ângulos internos aumentou os deslocamentos com destaque aos

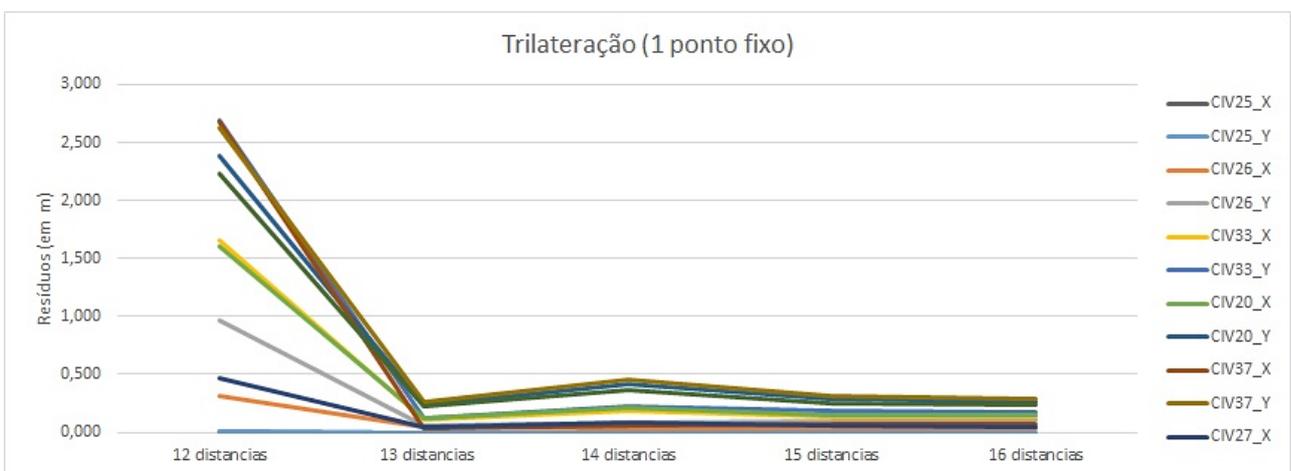
pontos mais distantes do CIV24, início da poligonal.

A Figura 6, apresenta as variações dos resíduos quando consideradas somente as distâncias observadas. No caso da triangulação com um ponto fixado, o número mínimo de observações foi 12 (7 da poligonal e mais 5 observações internas) para o sistema ser possível de resolução. Percebe-se que com 13 distâncias os resíduos sofrem uma redução importante e depois se estabilizam.



**FIGURA 5:** Variação de coordenadas X e Y de cada vértice pelo método combinado.

**Fonte:** Autores.



**FIGURA 6:** Variação de coordenadas X e Y de cada vértice pelo método de trilateração com 1 vértice fixo (CIV24).

**Fonte:** Autores.

Na Figura 7, estão apresentadas as variações dos resíduos considerando a fixação de um ponto adicional, o CIV27 ré do ponto CIV24. O experimento utilizou os mesmos dados da trilateração com único ponto, porém percebe-se que a dimensão das variações é semelhante a anterior com exceção do primeiro teste com 12 distâncias. Em ambas as trilaterações, o valor mínimo dos resíduos foi obtido com 13 distâncias. Este resultado pode indicar que algumas das observações adicionais pode conter algum tipo de inconsistência sistemática ou acidental que voltou a elevar os valores.

A triangulação não apresentou resultados melhores que o apresentado no Quadro 2. Além disso, a combinação de ângulos internos degradou a qualidade do levantamento indicando erros nas observações de campo que se propagaram na determinação dos vértices.

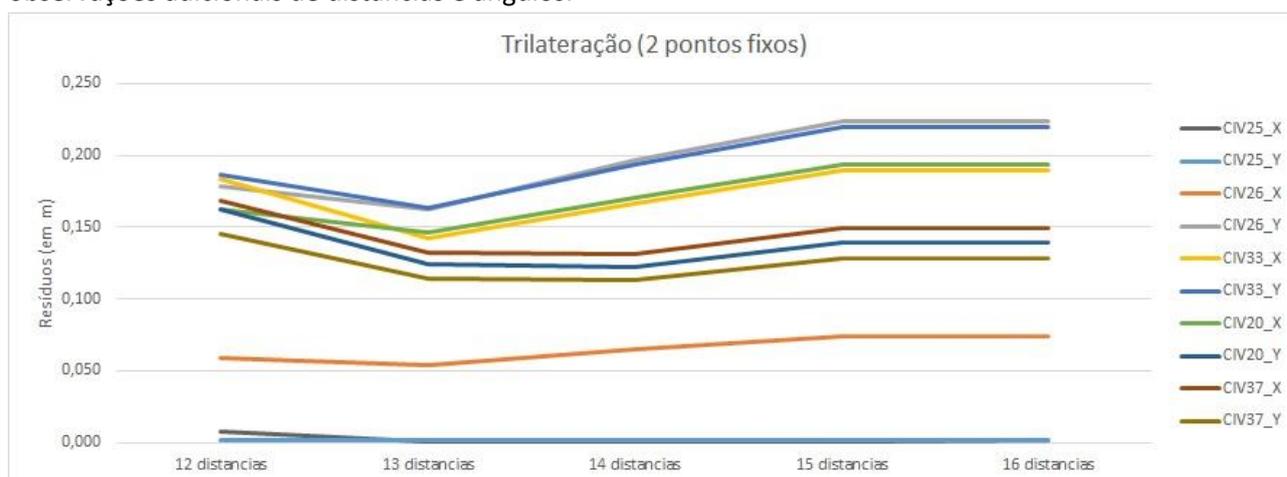
## 5. CONCLUSÕES

Esta pesquisa avaliou a propagação de erros na estimativa das coordenadas de uma poligonal de controle para locação de obras de engenharia e das precisões destas coordenadas em função dos diferentes métodos existentes. Foram avaliadas diversas variações no número de observações adicionais de distâncias e ângulos.

Verificou-se que o MMQ permite a identificação da existência de erros nas observações de campo através da verificação das variações das coordenadas e da determinação dos resíduos dessas coordenadas em cada método.

O método que combina ângulos e distâncias atingiu os melhores resultados e permite afirmar que as coordenadas apresentadas no Quadro 2 apresentam confiabilidade superior aos demais, uma vez que os resíduos ficam abaixo de 1,5 cm. Os outros métodos, envolvendo somente distâncias ou somente ângulos, apresentaram maiores variações de coordenadas e variâncias. Isto permite afirmar que o referencial para locação de obras na engenharia civil deve ser prioritariamente definido a partir de uma poligonal de controle que permita visadas internas, além da condição de intervisibilidade dos pontos ré e vante. Dessa forma, garante-se um número maior de equações do que incógnitas e o MMQ pode ser aplicado ao cálculo de poligonais. Além disso, deve-se aumentar o número de pontos fixados ao longo das maiores diagonais como forma de minimizar os valores de propagação.

Como continuidade dos trabalhos sugere-se a variação da forma e dimensões da poligonal bem como avaliar os efeitos da propagação de variâncias a partir de equipamentos diversos e com maior tempo de uso, na qualidade dos dados obtidos.



**FIGURA 7:** Variação de coordenadas X e Y de cada vértice pelo método de trilateração com 2 vértices fixos (CIV24 e CIV27). **Fonte:** Autores.

## 6. AGRADECIMENTOS

Parte desta pesquisa tem apoio do CNPq através do Edital Universal nº 04/2012.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMORIM, G. P. 2005. **Curso de formação continuada em Georreferenciamento Aplicado ao Cadastro Rural - Ajustamento de Observações**. MEC/SEMT/CEFET – ES.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR13.133 (1994)**. Execução de levantamento topográfico. Rio de Janeiro. Brasil. 1994

\_\_\_\_\_. **ADJUST 6.0.2**. 2013. Disponível em: <http://www.personal.psu.edu/cdg3/free.htm> Acessado em: 15/11/2014

CARVALHO, A. S. e LEANDRO. D. 2007. **Verificação da precisão das coordenadas ajustadas em poligonal fechada e enquadrada**. Anais: XXIII Congresso Brasileiro de Cartografia, Rio de Janeiro, Brasil.

COMASTRI, J, 1994. **Topografia: Planimetria**, Imprensa Universitária, Viçosa - MG, Brasil, 336 páginas.

GEMAEL, C. **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas**. Curitiba: Editora da UFPR, 1994. 319p

GHILANI, C. D. e WOLF, P. R. 2007. **Adjustment Computations: Spatial Data Analysis**, 10a Edição. ISBN: 9780471697282

GHILANI, C. D. e WOLF, P.R. 2010. **Geomática**, 13ª EDIÇÃO. ISBN: 9788581434506

DALMOLIN, Quintino, 2002. **Ajustamento por Mínimos Quadrados**, Imprensa Universitária, Curitiba, Brasil, 175 páginas.

MELO, W. D. A.; SOUZA, A. N. e DA SILVA, D. C. 2012. **Utilização do programa adjust em ajustamento de triangulações e trilaterações**. Anais: IV Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação Recife – PE.